

1. Un peu de 2nd degré

1.1 Étudier une fonction du 2nd degré

f, g et h sont trois fonctions polynômes du 2nd degré définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad g(x) = -3x^2 + 3x + 6 \quad h(x) = 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

1/ Etablir le tableau de variation de chacune des fonctions.

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$a = 1 > 0$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \text{ et } \beta = f(\alpha) = \frac{3}{4}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$			

$$g(x) = -3x^2 + 3x + 6$$

$$a = -3 < 0$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = f(\alpha) = \frac{27}{4}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$			

$$h(x) = 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

$$a = 2 > 0$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \text{ et } \beta = f(\alpha) = 0$$

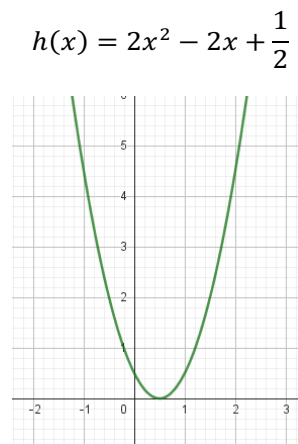
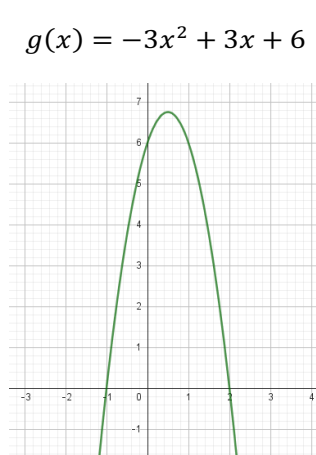
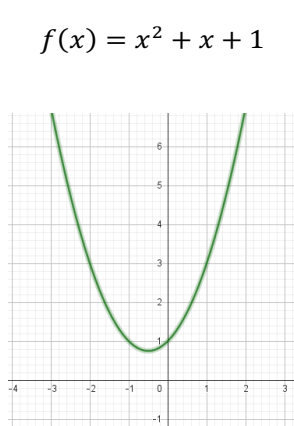
x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$			

2/ Rechercher les racines éventuelles de chaque fonction.

Pour déterminer les éventuelles racines, il faut commencer par calculer le discriminant.

$f(x) = x^2 + x + 1$ $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ Pas de racine	$g(x) = -3x^2 + 3x + 6$ $\Delta = 3^2 - 4 \times (-3) \times 6 = 81 > 0$ Deux racines réelles : $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{81}}{2 \times (-3)} = 2$ et $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{81}}{2 \times (-3)} = -1$	$h(x) = 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$ $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times \frac{1}{2} = 0$ Une racine double : $x_0 = \frac{-(-2)}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$
--	--	--

3/ Tracer une allure la plus complète possible de chaque courbe représentative.



1.2 Résolutions d'équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1) \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

On calcule le discriminant Δ . Les coefficients sont $a = 1$, $b = -2$ et $c = -3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$. $\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1.$$

$$\mathcal{S} = \{-1; 3\}$$

$$(E_2) \quad -x^2 + 4x - 1 = 0$$

On calcule le discriminant Δ . Les coefficients sont $a = -1$, $b = 4$ et $c = -1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-1) = 12$. $\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{12}}{2 \times (-1)} = \frac{-4+2\sqrt{3}}{-2} = 2 - \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{12}}{2 \times (-1)} = \frac{-4-2\sqrt{3}}{-2} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\mathcal{S} = \{2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}\}$$

$$(E_3) \quad 5x^2 + 2x = 3x - 1 \Leftrightarrow 5x^2 + 2x - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - x + 1 = 0$$

On calcule le discriminant Δ . Les coefficients sont $a = 5$, $b = -1$ et $c = 1$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 5 \times 1 = -19$. $\Delta < 0$, donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

$$(E_4) \quad 3x^2 = 3(2x - 1) \Leftrightarrow 3x^2 = 6x - 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

On calcule le discriminant Δ . Les coefficients sont $a = 3$, $b = -6$ et $c = 3$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 0$. $\Delta = 0$, donc l'équation admet une solution réelle.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \times 3} = 1$$

$$\mathcal{S} = \{1\}$$

1.3 Résolutions d'inéquations

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ des inéquations du second degré, il faut dresser le tableau de signe de la fonction polynôme associée.

$$(I_1) \quad x^2 - 2x - 3 \geq 0$$

D'après la question précédente, l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$ admet deux solutions réelles $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$.

$a > 0$, donc on obtient le tableau de signes ci-dessous. (signe de a sauf entre les racines)

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$x^2 - 2x - 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

Les solutions de l'inéquation sont donc les réels x tels que $x^2 - 2x - 3$ est positif ou nul.

On obtient donc $\mathcal{S} =]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$

$$(I_2) \quad -x^2 + 4x - 1 > 0$$

D'après la question précédente, l'équation $-x^2 + 4x - 1 = 0$ admet deux solutions réelles $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 - \sqrt{3}$.

$a < 0$, donc on obtient le tableau de signes ci-dessous. (signe de a sauf entre les racines)

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$		
$-x^2 + 4x - 1$		-	0	+	0	-

Les solutions de l'inéquation sont donc les réels x tels que $-x^2 + 4x - 1$ est strictement positif.

On obtient donc $\mathcal{S} =]2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}[$

$$(I_3) \quad 5x^2 + 2x < 3x - 1 \Leftrightarrow 5x^2 + 2x - 3x + 1 < 0 \Leftrightarrow 5x^2 - x + 1 < 0$$

D'après la question précédente, l'équation $5x^2 - x + 1 = 0$ n'admet pas de solution réelle.

$a > 0$, donc on obtient le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		$+\infty$
$5x^2 - x + 1$		+	

Les solutions de l'inéquation sont donc les réels x tels que $5x^2 - x + 1$ est strictement négatif. Aucun réel n'a d'image négative.

On obtient donc $\mathcal{S} = \emptyset$

$$(I_4) \quad 3x^2 \geq 3(2x - 1) \Leftrightarrow 3x^2 \geq 6x - 3 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 \geq 0$$

D'après la question précédente, l'équation $3x^2 - 6x + 3 = 0$ admet une unique solution $x_0 = 1$.

$a > 0$, donc on obtient le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$3x^2 - 6x + 3$		+	0	+	

Les solutions de l'inéquation sont donc les réels x tels que $3x^2 - 6x + 3$ est positif ou nul.

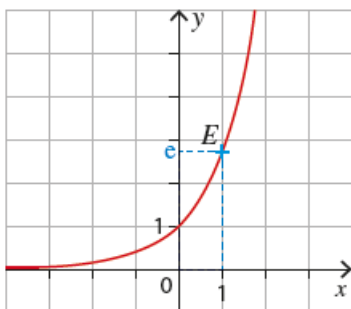
On obtient donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

2. Un peu d'exponentielle

2.1 Étude de la fonction $f: x \mapsto e^x$

1/ La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

Allure de la courbe :



2/ Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x			

Tableau de signe :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	+		

2.2 Calculs et propriétés

1/ Donner : $e^0 = 1$ et $e \approx 2,7182818$

2/ Simplifier les nombres suivants :

$$a = e^6 \times e^{-4}$$

$$a = e^6 \times e^{-4} = e^{6-4} = e^2$$

$$b = \frac{e^3}{e^1}$$

$$b = e^{3-1} = e^2$$

$$c = \frac{3e^5}{e \times e^2}$$

$$c = \frac{3e^5}{e^3} = 3e^{5-3} = 3e^2$$

$$a(x) = e^{-3x} \times e^{2x}$$

$$b(x) = \frac{e^{5x}}{e^{-2x}}$$

$$c(x) = \frac{e^{x^2-2x+1}}{e^{x^2+1}}$$

$$a(x) = e^{-3x+2x} = e^{-x} \text{ (ou encore } \frac{1}{e^x} \text{)}$$

$$b(x) = \frac{e^{5x}}{e^{-2x}} = e^{5x-(-2x)} = e^{7x}$$

$$c(x) = e^{x^2-2x+1-(x^2+1)} = e^{-2x}$$

2.3 Équations Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $e^{3x+1} = e^{x-4}$

$$e^{3x+1} = e^{x-4} \Leftrightarrow 3x+1 = x-4 \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$\text{On a donc } S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$$

b. $e^{x+4} = 1$

$$e^{x+4} = 1 \Leftrightarrow e^{x+4} = e^0 \Leftrightarrow x+4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$$

$$\text{On a donc } S = \{-4\}$$

c. $e^{x^2-1} = e^{2x-2}$

$$e^{x^2-1} = e^{2x-2} \Leftrightarrow x^2-1 = 2x-2 \Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Remarque : si vous ne remarquez pas l'identité remarquable le calcul de Δ permet de trouver la racine double $x_0 = 1$

$$\text{On a donc } S = \{1\}$$

2.4 Inéquations Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $e^{3x+1} > e^{x-4}$

$$e^{3x+1} > e^{x-4} \Leftrightarrow 3x + 1 > x - 4 \Leftrightarrow 2x > -5 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$$

On a donc $S =]-\frac{5}{2}; +\infty[$

b. $e^{x+4} \leq 1$

$$e^{x+4} \leq 1 \Leftrightarrow e^{x+4} \leq e^0 \Leftrightarrow x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -4$$

On a donc $S =]-\infty; -4]$

c. $e^{x^2-1} \geq e^{2x-2}$

$$e^{x^2-1} \geq e^{2x-2} \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$$

Remarque : cette inéquation est vérifiée pour tous les réels :

On a donc $S = \mathbb{R}$

3. Étude de signes

Pour faire ces tableaux de signes, on fait le tour de la carte mentale pour chaque expression. Revoir la vidéo si nécessaire !

$A(x) = -2x + 5$ pour $x \in \mathbb{R}$ $B(x) = 4e^{x-5}$ pour $x \in \mathbb{R}$ $C(x) = 2x^2 + 3$ pour $x \in \mathbb{R}$ $u_n = n(-2n - 3)$ pour $n \in \mathbb{N}$ $E(x) = 4 + 2x - 7x^2$ pour $x \in \mathbb{R}$ $F(x) = -2x^2 - 5$ pour $x \in \mathbb{R}$	$G(x) = (-2x + 5)(-x + 9)$ pour $x \in \mathbb{R}$ $H(x) = \frac{-1}{(x-17)^2}$ pour $x \in]-\infty; 17[\cup]17; +\infty[$ $I(x) = x^2 + x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$ $J(x) = \frac{7x-8}{8-x}$ pour $x \in]-\infty; 8[\cup]8; +\infty[$ $K(x) = 1 - e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$
--	---

➔ Signe évident

$$B(x) = 4e^{x-5} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{x-5} > 0$ car une exponentielle est toujours strictement positive.

On en déduit que, pour $x \in \mathbb{R}$, $4e^{x-5} > 0$ donc $B(x) > 0$.

$$C(x) = 2x^2 + 3 \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

On en déduit que pour $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + 3$ est positif.

x	$-\infty$	$+\infty$
$C(x)$	+	

$$F(x) = -2x^2 - 5 \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ car un carré est toujours positif.

Donc pour $x \in \mathbb{R}$, $-2x^2 \leq 0$

Donc, pour $x \in \mathbb{R}$, $-2x^2 - 5 < 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$F(x)$	-	

$$H(x) = \frac{-1}{(x-17)^2} \text{ pour } x \in]-\infty; 17[\cup]17; +\infty[$$

On rappelle que $(x - 17)^2$ ne peut pas être nul car on ne peut pas diviser par 0.

Or $(x - 17)^2 = 0$ pour $x = 17$.

Donc 17 est une valeur interdite.

Donc pour $x \in]-\infty; 17[\cup]17; +\infty[$, $(x - 17)^2 > 0$ car un carré est toujours positif.

Donc pour $x \in]-\infty; 17[\cup]17; +\infty[$, $\frac{-1}{(x-17)^2} < 0$.

x	$-\infty$	17	$+\infty$
$H(x)$	-		-

$$u_n = n(-2n - 3) \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

Comme $n \in \mathbb{N}$, on a $n \geq 0$ et $-2n - 3 \leq 0$.

On en déduit que le produit $n(-2n - 3)$ est négatif pour $n \in \mathbb{N}$

➔Du premier degré Fonctions affines A

Les fonctions affines f s'écrivent, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.

Le signe de a permet de connaître le sens de variation de f et d'en déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x (voir la vidéo sur le signe de la question 1)

Si $a > 0$, la fonction est croissante et le signe pour $f(x)$ sera - 0 +

Si $a < 0$, la fonction est décroissante et le signe pour $f(x)$ sera + 0 -

On cherche la valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$.

On conclut sur le tableau de signes.

$$A(x) = -2x + 5 \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

- Coefficient directeur : $a = -2 < 0 \rightarrow$ Décroissante donc + 0 -
- On résout : $-2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.
- Tableau de signes :

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$A(x)$	+	0	-

➔Du second degré Fonctions E et I

Les fonctions du second degré f s'écrivent, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Revoir la vidéo sur le signe d'une fonction du 2nd degré si nécessaire.

$$E(x) = 4 + 2x - 7x^2 = -7x^2 + 2x + 4 \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

Méthode : du signe de a donc négatif sauf entre les racines ou faire la courbe.

$$\Delta = 116 = 4 \times 29 \text{ donc } \sqrt{116} = 2\sqrt{29}. \text{ Il y a donc deux racines réelles qui sont } x_1 = \frac{-2 - \sqrt{116}}{-14} = \frac{1 + \sqrt{29}}{7} \text{ et } x_2 = \frac{1 - \sqrt{29}}{7}$$

On a donc :

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{29}}{7}$	$\frac{1+\sqrt{29}}{7}$	$+\infty$	
$E(x)$	-	0	+	0	-

$$I(x) = x^2 + x + 1 \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

Méthode : du signe de a donc positif sauf entre les racines ou faire la courbe.

$$\Delta = -3 < 0. \text{ Il n'y a donc pas de racines réelles.}$$

On a donc :

x	$-\infty$	$+\infty$
$I(x)$	+	

→ Produit G ou quotient J

$$G(x) = (-2x + 5)(-x + 9) \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

On étudie sur chaque ligne du tableau de signes le signe de chacune des fonctions affines $x \mapsto -2x + 5$ et

$$x \mapsto -x + 9$$

x	$-\infty$	2,5	9	$+\infty$
$-2x + 5$		+	0	-
$-x + 9$		+	+	0
$G(x)$		+	0	-

$$J(x) = \frac{7x-8}{8-x} \text{ pour } x \in]-\infty; 8[\cup]8; +\infty[$$

On cherche d'abord la valeur interdite.

Le dénominateur ne peut être égal à 0.

$$8 - x = 0 \Leftrightarrow x = 8$$

8 est la valeur interdite pour $K(x)$.

On étudie sur chaque ligne du tableau de signes le signe de chacune des fonctions affines.

$$x \mapsto 7x - 8 \text{ et } x \mapsto 8 - x$$

x	$-\infty$	$\frac{8}{7}$	8	$+\infty$
$7x - 8$		-	0	+
$8 - x$		+	+	0
$J(x)$		-	0	+

→ avec de l'exponentielle K

Revoir la vidéo si nécessaire.

$$K(x) = 1 - e^x \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

On résout l'inéquation :

$$1 - e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow -e^x > -1$$

$$\Leftrightarrow e^x < 1$$

$$\Leftrightarrow e^x < e^0$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \text{ en utilisant la propriété } e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

On a alors :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$K(x)$		+	0

4. Autour des dérivées

4.1 Lectures graphiques

La courbe d'une fonction f et trois de ses tangentes ont été tracées aux points A, B et C d'abscisses respectives 0, 1,5 et 3.

1/ On détermine l'image en lisant l'ordonnée des points d'abscisses 0, 1,5 et 3. Ainsi $f(0) = 1$, $f(1,5) \approx 3,2$ et $f(3) = 1$.

2/ Lire graphiquement $f'(0)$, $f'(1,5)$ et $f'(3)$. Pour lire le nombre dérivé, on détermine graphiquement le coefficient directeur des tangentes aux points A, B et C. Ainsi $f'(0) = \frac{3}{1} = 3$, $f'(1,5) = 0$ et $f'(3) = -\frac{3}{1} = -3$

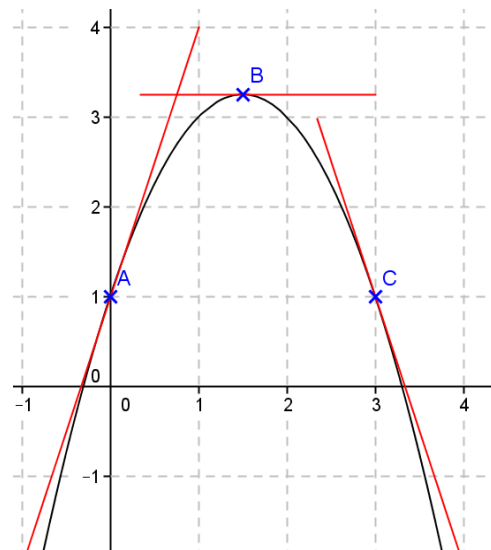
3/ Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point C. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

On demande au point C d'abscisse $a = 3$.

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3).$$

$$y = -3(x - 3) + 1.$$

$$y = -3x + 10. \text{ L'équation de la tangente à la courbe de } f \text{ au point C est donc } \boxed{y = -3x + 10}$$



4.2 Dérivées et sens de variation

Pour chacune des fonctions suivantes :

1/ Calculer la dérivée.

2/ Étudier son signe.

3/ En déduire ses variations.

f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 + 3x$

f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = -\frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - x + 1$

f_3 est définie sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ par $f_3(x) = \frac{x+3}{2x-1}$.

f_4 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_4(x) = (3x + 2)e^{2x}$

f_5 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_5(x) = e^x - x$

f_6 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_6(x) = -6e^{-2x} + 7x - \frac{6}{5}$

f_7 est définie sur $]1; +\infty[$ par $f_7(x) = \sqrt{2x - 2}$

a) $f_1(x) = x^2 + 3x$.

Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.

1. On détermine la fonction dérivée :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f_1'(x) = 2x + 3$$

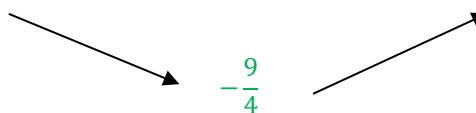
2. On étudie le signe de la dérivée pour en déduire les variations :

Signe de $2x + 3$:

Cette expression est du premier degré, donc pour déterminer son signe, on utilise le signe d'une fonction affine.

On a $a = 2 > 0$ donc cette fonction affine est croissante, ses images vont des négatifs vers les positifs.

On a aussi $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'_1(x) = 2x + 3$	$-$	0	$+$
Variations de f_1			

$$f_1\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{18}{2} = -\frac{9}{4}$$

b) $f_2(x) = -\frac{5}{3}x^3 + 3x^2 - x + 1$

Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.

1. On détermine la fonction dérivée :

f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f'_2(x) = -5x^2 + 6x - 1$$

2. On étudie le signe de la dérivée pour en déduire les variations :

Signe de $-5x^2 + 6x - 1$:

Cette expression est de degré 2, on doit donc déterminer Δ et ses éventuelles racines pour donner le signe

$\Delta = 6^2 - 4 \times (-5) \times (-1) = 36 - 20 = 16$. Ce polynôme a deux racines.

$$x_1 = \frac{-6 + \sqrt{16}}{-10} = \frac{1}{5} \text{ et } x_2 = \frac{-6 - \sqrt{16}}{-10} = 1$$

3. $a = -5 < 0$, on obtient donc le tableau suivant sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$\frac{1}{5}$	1	$+\infty$	
Signe de $f_2'(x) = -5x^2 + 6x - 1$	$-$	0	$+$	0	$-$
Variations de f_2	$\frac{68}{75}$ $\frac{4}{3}$				

$$f_2\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{5}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5} + 1 = \frac{68}{75} \text{ et } f_2(1) = \frac{4}{3}$$

c) $f_3(x) = \frac{x+3}{2x-1}$ sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.

1. On détermine la fonction dérivée :

f_3 est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ comme quotient de fonctions dérivables.

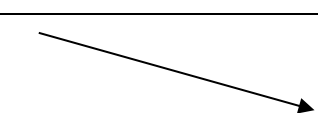
$$f'_3(x) = \frac{1 \times (2x - 1) - (x + 3) \times 2}{(2x - 1)^2} = \frac{2x - 1 - 2x - 6}{(2x - 1)^2} = \frac{-7}{(2x - 1)^2}$$

2. On étudie le signe de la dérivée pour en déduire les variations :

Le dénominateur est toujours positif sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et le numérateur toujours négatif.

Le signe de $f'_3(x)$ est donc négatif pour tout x de $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

3. On obtient donc le tableau suivant sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$:

x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Signe de $f'_3(x)$	$-$	
Variations de f_3		

d) $f_4(x) = (3x + 2)e^{2x}$

Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.

1. On détermine la fonction dérivée :

f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$f_4'(x) = 3 \times e^{2x} + (3x + 2) \times 2e^{2x} = (3 + 2(3x + 2))e^{2x} = (6x + 7)e^{2x}$$

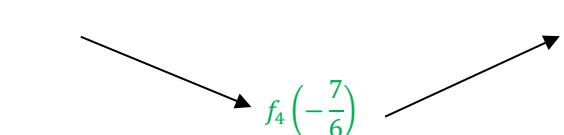
2. On étudie le signe de la dérivée pour en déduire les variations :

- **Signe de e^{2x}** : Pour tout x réel, e^{2x} est strictement positif.
- **Signe de $6x + 7$** :

Cette expression est du premier degré, donc pour déterminer son signe, on utilise le signe d'une fonction affine. On a $a = 6 > 0$ donc cette fonction affine est croissante, ses images vont des **négatifs** vers les **positifs**. On a aussi $6x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{6}$

Par produit, le signe de $f_4'(x)$ est donc strictement négatif pour tout x de $] -\infty ; -\frac{7}{6} [$ et strictement positif sur $] -\frac{7}{6} ; +\infty [$.

3. On en déduit le tableau suivant sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$-\frac{7}{6}$	$+\infty$
Signe de $f_4'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f_4			

$$f\left(-\frac{7}{6}\right) = \left(3 \times \left(-\frac{7}{6}\right) + 2\right) e^{2 \times \left(-\frac{7}{6}\right)} = -\frac{3}{2} e^{-\frac{7}{3}}$$

e) $f_5(x) = e^x - x$

Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.

1. On détermine la fonction dérivée :

f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f_5'(x) = e^x - 1$$

2. On étudie le signe de la dérivée pour en déduire les variations :

On résout l'inéquation :

$$e^x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x > 1$$

$$\Leftrightarrow e^x > e^0$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \text{ en utilisant la propriété } e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

Le signe de $f_5'(x)$ est donc **strictement négatif** pour tout x de $] -\infty ; 0 [$ et **strictement positif** sur $] 0 ; +\infty [$.

3. On obtient donc le tableau suivant sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f_5'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f_5			

f) $f_6(x) = -6e^{-2x} + 7x - \frac{6}{5}$

Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.

- On détermine la fonction dérivée :
 f_6 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'_6(x) = -6 \times (-2)e^{-2x} + 7 = 12e^{-2x} + 7$$

- On étudie le signe de la dérivée pour en déduire les variations :
Pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} > 0$ car une exponentielle est toujours strictement positive.
On en déduit que, pour $x \in \mathbb{R}$, $12e^{-2x} + 7 > 0$ donc $f'_6(x) > 0$.

Le signe de $f'_6(x)$ est donc **strictement positif** sur $\mathbb{R}$.

- On obtient donc le tableau suivant sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'_6(x)$	+	
Variations de f_6		

g) $f_7(x) = \sqrt{2x-2}$.

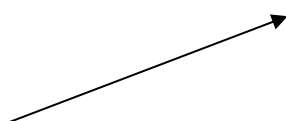
Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.

- On détermine la fonction dérivée :
 f_7 est dérivable sur $]1; +\infty[$.

$$f'_7(x) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-2}}$$

- On étudie le signe de la dérivée pour en déduire les variations :
Le dénominateur est strictement positif sur $]1; +\infty[$ et le numérateur toujours positif.
Le signe de $f'_7(x)$ est donc positif pour tout x de $]1; +\infty[$.

- On obtient donc le tableau suivant sur $]1; +\infty[$:

x	1	$+\infty$
Signe de $f'_7(x)$	+	
Variations de f_7		

4.3 Étude de fonction

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$.

1/ Expliquer pourquoi f est définie sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

On détermine la valeur interdite en cherchant la valeur qui annule le dénominateur : $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Cette fonction est donc définie pour $x \neq 1$ donc sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

2/ Montrer que $f'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2}$.

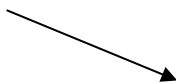
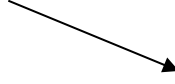
$$f'(x) = \frac{3 \times (x-1) - (3x+2) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{3x-3-3x-2}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$$

3/ En déduire le signe de f' sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

Le dénominateur est toujours positif sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ et le numérateur toujours négatif

Le signe de $f'(x)$ est donc négatif pour tout x de $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

4/ En déduire le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$		$-$
Variations de f			

5/ Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative C_f au point d'abscisse 2.

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

On demande au point d'abscisse $a = 2$.

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2).$$

$$\text{On a } f'(2) = -\frac{5}{(2-1)^2} = -5 \text{ et } f(2) = \frac{3 \times 2 + 2}{2-1} = 8$$

$$\text{Donc } y = -5(x - 2) + 8.$$

$$\text{L'équation de } T \text{ est donc } y = -5x + 18$$

6/ Étudier la position relative de C_f et sa tangente T .

Pour étudier la position relative de deux courbes représentatives, on étudie le signe de la différence de leurs expressions.

Par exemple, si les deux fonctions sont f et g , on étudie le signe de $d(x) = f(x) - g(x)$.

On considère ici, la fonction f et la fonction affine g définie par $g(x) = -5x + 18$

Pour tout x de $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$, on définit $d(x) = f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} d(x) &= f(x) - (-5x + 18) = \frac{3x + 2}{x - 1} - \frac{(-5x + 18)(x - 1)}{x - 1} = \frac{3x + 2 - (-5x^2 + 5x + 18x - 18)}{x - 1} \\ &= \frac{5x^2 - 20x + 20}{x - 1} = \frac{5(x^2 - 4x + 4)}{x - 1} = \frac{5(x - 2)^2}{x - 1} \end{aligned}$$

Pour tout x de $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$, $5(x - 2)^2$ est positif.

L'expression $x - 1$ est strictement négative sur $]-\infty; 1[$ et strictement positive sur $]1; +\infty[$,

On en déduit que :

Sur $]-\infty; 1[$, l'expression $d(x)$ est strictement négative, donc la courbe représentative de f est en dessous de la tangente T et sur $]1; +\infty[$, l'expression $d(x)$ est strictement positive, donc la courbe représentative de f est au-dessus de la tangente T .

5. Probabilités

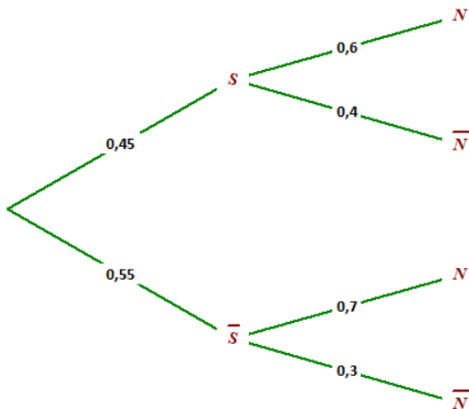
Un sondage a été effectué auprès de vacanciers sur leurs pratiques sportives pendant leurs congés. Ce sondage révèle que 45 % des vacanciers fréquentent une salle de sport pendant leurs congés et parmi ceux-ci, 60 % pratiquent la natation. Parmi les vacanciers qui ne fréquentent pas une salle de sport, 70 % pratiquent la natation.

On choisit un vacancier au hasard. On considère les événements suivants :

S : « le vacancier choisi fréquente une salle de sport »

N : « le vacancier choisi pratique la natation ».

1/



2/ a. Définir par une phrase l'évènement $S \cap N$.

$S \cap N$: « le vacancier choisi fréquente une salle de sport et pratique la natation »

b. Calculer la probabilité de l'évènement $S \cap N$.

$$P(S \cap N) = 0,45 \times 0,6 = 0,27$$

3/ Montrer que $P(N) = 0,655$.

$$P(N) = P(S \cap N) + P(\bar{S} \cap N) = 0,27 + 0,55 \times 0,7 = 0,655$$

4/ Calculer $P_N(S)$, la probabilité de l'évènement S sachant que l'évènement N est réalisé.

On arrondira le résultat à 10^{-4} près.

$$P_N(S) = \frac{P(S \cap N)}{P(N)} = \frac{0,27}{0,655} \approx 0,4122$$

6. Suites

6.1 Calcul de termes et sens de variation

1/ Déterminer les trois premiers termes pour chacune des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 4n^2 + 7n - 1 ;$$

$$u_0 = 4 \times 0^2 + 7 \times 0 - 1 = -1$$

$$u_1 = 4 \times 1 + 7 \times 1 - 1 = 4 + 7 - 1 = 10$$

$$u_2 = 4 \times 2 + 7 \times 2 - 1 = 8 + 14 - 1 = 21$$

$$v_{n+1} = 2v_n + 3 \text{ et } v_0 = -4 ;$$

$$v_0 = -4$$

$$v_1 = 2v_0 + 3 = 2 \times (-4) + 3 = -8 + 3 = -5$$

$$v_2 = 2v_1 + 3 = 2 \times (-5) + 3 = -10 + 3 = -7$$

$$w_{n+1} = w_n + n - 1 \text{ et } w_0 = 2.$$

$$w_0 = 2$$

$$w_1 = w_0 + 0 - 1 = 2 + 0 - 1 = 1$$

$$w_2 = w_1 + 1 - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$$

2/ Pour tout entier naturel n , exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n puis en déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

$$u_{n+1} = 4(n+1)^2 + 7(n+1) - 1 = 4(n^2 + 2n + 1) + 7n + 1 - 1 = 4n^2 + 8n + 4 + 7n = 4n^2 + 15n + 4$$

Ainsi, on a :

$$u_{n+1} - u_n = 4n^2 + 15n + 4 - (4n^2 + 7n - 1) = 4n^2 + 15n + 4 - 4n^2 - 7n + 1 = 8n + 5$$

Pour tout entier naturel n , la différence $u_{n+1} - u_n$ est strictement positive donc la suite (u_n) est strictement croissante.

6.2 Suites arithmétiques et géométriques

1/ (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_0 = -5$.

a. Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .

$$u_n = u_0 + nr = -5 + 3n$$

b. En déduire u_8 .

$$u_8 = -5 + 3 \times 8 = -5 + 24 = 19$$

2/ (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 96$.

a. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n .

$$v_n = v_0 \times q^n = 96 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b. En déduire v_6 .

$$v_6 = 96 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{96}{2^6} = \frac{96}{64} = \frac{3}{2}$$

6.3 Problème (Étude d'une suite arithmético-géométrique)

Le 1er janvier 2022, on a placé 5000 euros à intérêts composés au taux annuel de 4%. (Cela signifie que les intérêts ajoutés au capital à chaque nouvelle année représentent 4% du capital de l'année précédente)

Chaque 1^{er} janvier, on place 200 euros supplémentaires sur ce compte.

On note $C_0 = 5000$ le capital disponible au 1er janvier de l'année 2020, et C_n le capital disponible au 1^{er} janvier de l'année 2022 + n .

1/ Calculer les valeurs exactes de C_1 et C_2 .

$$C_1 = 1,04 \times 5000 + 200 = 5400 \text{ et } C_2 = 1,04 \times 5400 + 200 = 5816$$

2/ Justifier que pour tout entier n , on a $C_{n+1} = 1,04 C_n + 200$.

Le taux annuel est de 4%, donc la somme sur le compte avant l'ajout de 200 € est $1,04 C_n$. Puis, on ajoute 200 €, donc pour tout entier n , on a $C_{n+1} = 1,04 C_n + 200$.

3/ Justifier que la suite (C_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

$$C_2 - C_1 = 416 \text{ et } C_1 - C_0 = 400$$

$C_2 - C_1 \neq C_1 - C_0$. La suite n'est pas arithmétique.

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{5816}{5400} = \frac{727}{675} \text{ et } \frac{C_1}{C_0} = \frac{5400}{5000} = \frac{27}{25}$$

$\frac{C_2}{C_1} \neq \frac{C_1}{C_0}$. La suite n'est pas géométrique.

La suite (C_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

4/ Pour tout entier n , on pose $v_n = C_n + 5000$.

a. Calculer v_0 puis montrer que (v_n) est une suite géométrique.

$$v_0 = C_0 + 5000 = 10000 ;$$

$$v_{n+1} = C_{n+1} + 5000 = 1,04 C_n + 200 + 5000 = 1,04(C_n + 5000) + 5200 = 1,04 v_n - 5200 + 5200 = 1,04 v_n.$$

(v_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme 10000.

b. En déduire l'expression de v_n puis de C_n en fonction de n .

$$v_n = 10000 \times 1,04^n \text{ puis } C_n = v_n - 5000 = 10000 \times 1,04^n - 5000.$$

c. Calculer le capital disponible à la fin de l'année 2030, arrondi à l'euro près.

Le capital disponible à la fin de l'année 2030 (2022+8) correspond à $C_8 \approx 8586,7$ arrondi à l'euro près.

5/ On donne le script Python ci-contre : À quelle question permet de répondre l'instruction `>>> Capital(5000)` saisie dans la console ? Donner les valeurs renvoyées N et C obtenues et conclure.

```
def Capital(C):  
    N=0  
    while C<10000:  
        C=C*1.04+200  
        N=N+1  
    return N,C
```

L'instruction `Capital(5000)` permet de savoir quand le capital va dépasser 10000 €.

Pour obtenir les valeurs de N et C , on peut programmer la suite dans la calculatrice et demander un tableau de valeurs ou bien saisir le script de la fonction dans un fichier Python.

*** Console de processus distant Réinitialisée ***

```
>>> Capital(5000)  
(11, 10394.540563150778)
```

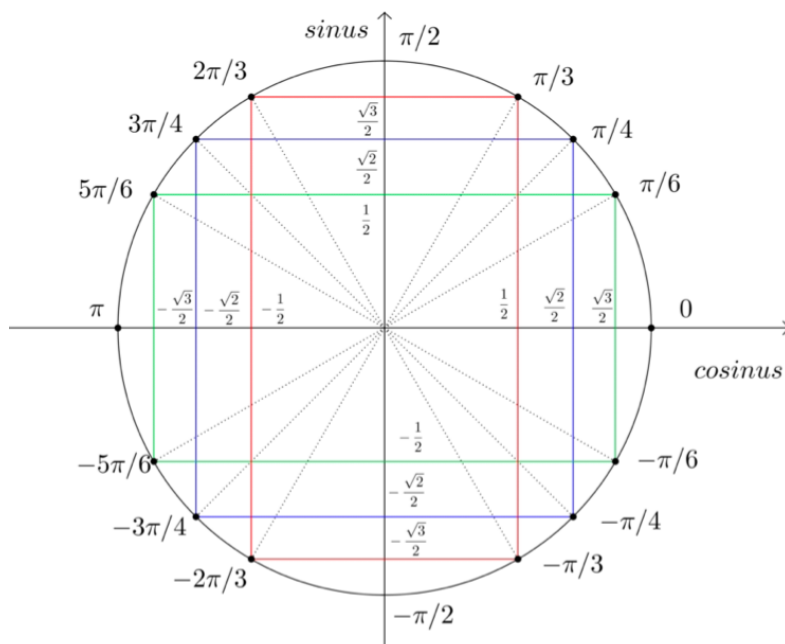
Les valeurs de N et C obtenues sont $N = 11$ et $C \approx 10394,5$

Ce qui signifie que le capital dépassera 10000€ la 11^{ième} année, c'est-à-dire en 2033.

Ce capital sera alors de 10394,50 €.

7. Trigonométrie

Compléter le cercle trigonométrique ci-dessous ainsi que le tableau des valeurs remarquables de cosinus et sinus.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

En déduire :

- $\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{16\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(4\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin\left(\frac{37\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{36\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(12\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{12\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(-2\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

8. Produit scalaire

8.1 Calcul de produits scalaires

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans les cas suivants :

1/ $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 7 \times 6 + (-4) \times 2 = 42 - 8 = 34$$

2/ $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$; $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{3}$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC}) = 5 \times \sqrt{3} \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$$

8.2 Triangle rectangle

On considère les trois points $M(9; -3)$, $N(1; 7)$ et $P\left(-\frac{3}{2}; 5\right)$.

Démontrer que le triangle MNP soit rectangle en N .

$$\overrightarrow{NM} \begin{pmatrix} x_M - x_N \\ y_M - y_N \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{NM} \begin{pmatrix} 9 - 1 \\ -3 - 7 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{NM} \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{NP} \begin{pmatrix} x_P - x_N \\ y_P - y_N \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{NP} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - 1 \\ 5 - 7 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{NP} \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 8 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + (-10) \times (-2) = -20 + 20 = 0$$

$\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{NM}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont orthogonaux donc le triangle MNP est rectangle en N .